**問題 1.** $n$ を 1 以上の正の整数，$S(n)$ は 1 から $n$ までの整数の集合 $S(n) = \{1, \ldots, n\}$ を表すとする．以下の各問に答えよ．

(1) $S(n)$ の部分集合はいくつあるか．数式で答えよ．
$2^n$ 個．べき集合 $2^{S(n)}$ の要素数である．

(2) $S(6)$ の部分集合で，要素数が 4 以上のものはいくつあるか．整数で答えよ．
$n$ 個の異なる要素から $m$ 個選ぶ順序を問わない組合せは ${}_nC_m = \frac{n \cdot \cdots \cdot (n-(m-1))}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{1}{m!}$ 通り．よって $\displaystyle\sum_{m=4}^{6} {}_6C_m = \frac{6!}{6!} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1 + 6 + 15 = 22$ 個．

(3) $S(n)$ の要素すべてをちょうど一度ずつ並べてできる列は何種類あるか．数式で答えよ．
$n!$ 個．

**問題 2.** 見かけが同じ金貨が 10 枚ある．そのうち一枚が不良品で，その金貨だけ他のものに比べわずかに軽い．この不良品を，天秤のみを使って見つけ出すことを考える．天秤は，左右の皿にのせた物どちらが重いかを調べる目的のみに使用し，分銅などは用いない．天秤を使う回数が可能な限り少なくなるアルゴリズム（天秤の使用手順）を考え答えよ．

(1) 金貨が 10 枚なら天秤を使う回数は必ず 3 回以下にできる．そのアルゴリズムを書け．
**アルゴリズム A** (任意の枚数に拡張すると，最悪の場合の回数を最小にできる):
(1 回目) 金貨を 3 枚ずつ天秤に乗せ，4 枚はのせずにおく．釣り合わなかった場合，軽い方 3 枚に不良品が含まれる．釣り合った場合は，乗せなかった 4 枚に不良品が含まれる．
(2 回目) 不良品を含む 3 枚または 4 枚から，1 枚ずつを天秤の皿にのせる．釣り合わなかった場合，軽い方が不良品である．釣り合った場合，乗せずにおいた金貨に不良品が含まれる．1 枚だけ乗せなかった場合はそれが不良品である．
(3 回目) 不良品を含む 2 枚が残った場合は， 1 枚ずつを天秤の皿にのせる．軽い方が不良品である．

**アルゴリズム B** (概略): 金貨を半分ずつ天秤に乗せる．奇数枚のときは 1 枚のせずにおく．釣り合わなかった場合，軽い方に不良品が含まれる．釣り合った場合は，乗せなかった金貨が不良品．以下，同様に繰り返すと最悪 3 回で見つけることができる．

(2) 上のアルゴリズムは，金貨が何枚の場合でも使用できるよう書き直せるはずである.（天秤は金貨の重さに耐えうるとする.）一般的に金貨が $N \geq 1$ 枚（うち不良品は 1 枚）のとき，天秤を最悪何回使えば不良品を見つけることができるかを $N$ の関数（式）で表せ．ただし，式は $N$ によらず常に整数を表すものであること．

三等分する戦略（アルゴリズム A）では，$\lceil \log_3 N \rceil$．$N$ が 3 のべきのとき，無駄なく天秤を使えるからである．二等分する戦略（アルゴリズム B）は，$N$ が 2 のべきで一度も余りがでない場合が効率が悪くなるので，$\lfloor \log_2 N \rfloor$ となる．なお，いうまでもなく $N \geq 1$ のとき $\log_2 N \geq \log_3 N$.