問題 1 (壁にぶちあたったらどうするか). 移動ロボットが未知の環境で障害物を回避しながら目的地点に到達できるようアルゴリズムを考えよう．

ここで考える移動ロボットは低い円筒形をしており，左右両端に車輪を持ち，その回転を制御して前後進と方向転換を行う．また近接センサを持っており，障害物に接近するとその存在を検知できる．話を簡単にするため，ロボットの移動量と向きは正確に制御でき，位置を把握できるとする．

さて，ロボットが出発してしばらくして，行く手を遮る壁に遭遇した．壁はまっすぐだがその長さ（幅）は不明である．ロボットは壁づたいに右左に移動できるので，壁の左端か右端にたどり着けば，壁のむこうへ出ることができる．しかし，壁に遭遇した位置から，壁の左端と右端どちらが近いかは不明である．

ロボットの移動距離をコストと考えて，最悪の場合の総コストができるだけ小さくなるアルゴリズムを考えよう．

(1) 壁にぶつかった地点から，右に 1m, 左に 2m, 右に 3m，と交互に探索するアルゴリズムを使うとする．

壁の近い方の端までの距離を ℓ m としたとき，最悪の場合のコストを ℓ の関数として，最も適切な形のオーダー記法で書け．

(2) 最悪の場合のコストが $O(\ell)$ となるアルゴリズムを考えよ．

問題 2 (ユークリッドの互除法の謎を解明). 式 $a - b = c$ において，a, b, c のいずれか二つが整数ならば，残る一つも必ず整数である．同じことは，加算および乗算についても言える．これを「整数は減算（加算，または乗算）について閉じている」という．

(1) 任意の正の整数 a, b について，a と b の最大公約数 $\gcd(a, b)$ と，$a - b$ と b の最大公約数 $\gcd(a - b, b)$ は等しい．(話を簡単にするため $a \geq b$，つまり $a - b$ は非負と仮定する．）これをまず，(i) a, b の公約数は $a - b, b$ の公約数であり，同時に (ii) $a - b, b$ の公約数は a, b の公約数である，という二つを示して，その結論として導け．

(2) 整数 a, b について，a が b で割り切れないとする．このとき，a, b を入力とするユークリッドのアルゴリズムの計算は，$b, (a \bmod b)$ を入力とする計算と，繰り返し一回分異なるだけである．このことと，上の (i) で示したことを組み合わせて，ユークリッドの互除法により任意の正整数 a, b の最大公約数 $\gcd(a, b)$ が求められることを説明せよ．