レポート課題 1：計算量とオーダー表記

問題 I　n を問題例（入力）のサイズとしてアルゴリズムの最悪時間計算量を表すとする．以下の各問に答えよ．

問 1　(1) 関数 $23n+1001+\dfrac{2}{3}n^2$ が $O\left(n^2\right)$ であることをオーダー $O(\ )$ 表記の定義に従い証明せよ．

(2) 同様に，上記の関数 が $O\left(n\right)$ でないことをオーダー $O(\ )$ 表記の定義に従い証明せよ．

問 2　n の関数 $f\left(n\right)$ と $g\left(n\right)$ について，$g\left(n\right)$ は $O\left(f\left(n\right)\right)$ であるが $f\left(n\right)$ は $O\left(g\left(n\right)\right)$ でないとき $g\left(n\right) \prec f\left(n\right)$ と書き，$f\left(n\right)$ は $g\left(n\right)$ より強いということにする．また，$f\left(n\right)$ は $O\left(g\left(n\right)\right)$ でかつ $g\left(n\right)$ は $O\left(f\left(n\right)\right)$ であるとき，$f\left(n\right) \sim g\left(n\right)$ と書くことにする．

以下の n の関数(a)～(l)を記号 $\prec$ または $\sim$ を使って強い順に並べよ．

(a) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$	(b) n^2	(c) 2^{n+1}	(d) $\sqrt{n}$
(e) $\log_2{}^7 n$	(f) $n / \log_2 n$	(g) $\log_2 \log_2 n$	(h) $\log_2 n^3$
(i) 1514	(j) $n \log_2 n$	(k) $n!$	(l) $3n$

問 3　アルゴリズムの時間計算量を調べたところ(1), (2)のような関数で表せることがわかったとする．それぞれを最も適切なオーダー$O(\ )$表記で書け．

(1) $5n+\dfrac{1}{2}n\log_2 n+\dfrac{3!}{n}$　　(2) n が奇数のとき n^3，n が偶数のとき $n^2 \log_2 n$

問題 II　以下のアルゴリズムは正の整数 n を受け取り，正の整数の列を出力（例えば標準出力）に書き出す．

> 入力変数：n （整数型）
>
> 作業変数：d （整数型）
>
> (1)　$n>0$ ならば 1 を書き出し，そうでなければ計算を終了する．
>
> (2)　$d=2$ とする．
>
> (3)　$n<d$ ならば計算を終了する．
>
> (4)　n を d で割った余りが 0 ならば $n=n/d$ とし，d の値を書き出す．
> 　　そうでなければ $d=d+1$ とする．
>
> (5)　(3)に戻る．

問 4　自分の学籍番号を入力 n とすると，どのような整数の列が得られるか．必要なら実際にプログラムして確かめよ．
（プログラムと実行例は，裏面を参考にせよ．）

問 5　入力 n として 2 のべき乗（$1,2,4,8,16,32,\dots$）のみ与えられるとき，(3)の部分は何回繰り返されるか．n の関数の最も適切なオーダー $O(\ )$ 表記で表せ．

問 6　アルゴリズムの一般的な最悪時間計算量を最も適切なオーダー $O\Big(\quad\Big)$ 表記で表せ．ただし整数 d の書き出しは，その値によらず定数時間で行えるとする．

プログラムリスト 1

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main(int argc, char * argv[]) {
  int n = atoi(argv[1]);
  int d;

  printf("Input: %d¥n",n);
  if (! (n > 0) )
    return 0;
  printf("%d, ",1);
  for (d = 2; ! (n < d); ) {
    if (n % d == 0) {
      n = n / d;
      printf("%d, ", d);
    } else {
      d++;
    }
  }
  printf("¥n");
  return 0;
}
```

実行例

```
% ./a.out 34
Input: 34
1, 2, 17,
%
```

レポート課題１：解答の手引き

問 1 （問題 I） （１）（例えば）$n > \sqrt{1001}$（> 23）であれば $23n + 1001 + \frac{2}{3}n^2 \le \left(2 + \frac{2}{3}\right)n^2$ が成り立つから，$O\left(n^2\right)$ である．

（２） 式 $23n + 1001 + \frac{2}{3}n^2$ が $O\left(n\right)$ なら，任意の $n > b$ について $23n + 1001 + \frac{2}{3}n^2 \le c \cdot n$ が成り立つ，そのような定数 b と c がとれるはずである．しかし，どのような $c > 0$ に対しても $n \ge b$ かつ $n > \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot c$ のとき不等式が成り立たない．よって $O\left(n\right)$ ではない．

問 2 任意の定数 $\alpha, \beta > 1$，$k, k' \ge 1$ について $\log^{k'} n \prec n^{1/\beta} \prec n^k \prec \alpha^n \prec n!$ が言える．（確かめるには，たとえば関数の極限値について（a） $\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(n\right)}{g\left(n\right)} = 0$ のとき $f\left(n\right)$ は$O\left(g\left(n\right)\right)$，（b） $\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(n\right)}{g\left(n\right)} \in \mathbb{R}^+$ のとき $f\left(n\right)$は $O\left(g\left(n\right)\right)$ かつ $g\left(n\right)$ は$O\left(f\left(n\right)\right)$，そして（c） $\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(n\right)}{g\left(n\right)} = \infty$ のとき $g\left(n\right)$ は $O\left(f\left(n\right)\right)$ が成り立つことを利用する．これは $\lim_{n\to\infty}$ の定義からごく簡単にわかる．コロナ社「アルゴリズムの基礎」１章演習問題 1.6.）よって

$$1514 \prec \log_2 \log_2 n \prec \log_2 n^3 \prec \log_2{}^7 n \prec \sqrt{n} \prec n / \log_2 n \prec 3n \prec n^2 \prec \left(\frac{4}{3}\right)^n \prec 2^{n+1} \prec n!$$

が成り立つ．

なお $\log_2{}^7 n$ とは $\left(\log_2 n\right)^7$ のことであり，$\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$，$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ であるのは言うまでもない．

問 3 問 2 の結果を用いれば明らかである．

問 4 （問題 II） 素因数分解をするアルゴリズムになっている．同じ素因数のべきが含まれる場合は，同じ素因数がべき数だけ並ぶ．

問 5 $d = 2$のまま $n = 1$ になるまで計算が進み，終了するから，$\log_2 n + 1$ 回繰り返される．したがって，$O\left(\log n\right)$ である．

問 6 このアルゴリズムは, 一度繰り返しが起きるたびに n が少なくとも半分になる（1 以上減る）か，d が 1 増える．n が変化せず d がインクリメントされつづける，つまり n が素数だと最悪の場合となる．このとき (3) は $n + 1$ 回繰り返され，したがって最悪時間計算量は $O\left(n\right)$ である．